

PLANTILLA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Límites no rutinarios

CÓDIGO MAT-CAL 1-X2	NIVEL ★ X · Desafío	TIEMPO ESTIMADO 15–20 min por versión	VERSIÓN v1.0 · 09/2026
DISCIPLINA · ASIGNATURA Matemáticas · Cálculo Diferencial · Módulo 1		TEMA DEL ÍNDICE MAESTRO Límites y continuidad (arquetipo del módulo)	
QUÉ EVALÚA ESTE ARQUETIPO Que el estudiante use heurísticas (cambio de variable, patrones, acotación, reescritura) cuando ninguna plantilla se aplica directamente.			

 Pista  Frontera  Cuidado  Clave ☐ Control  Conexión

1 **RECONOCE** · Identificación del Problema

Reconocer el arquetipo antes de calcular · ¿Qué tipo de problema es este?

Este tipo de problema suele aparecer cuando un límite **no se resuelve con una sola técnica conocida**: exponentes generales, raíces de distinto índice, parte entera o combinaciones poco habituales. Aquí se espera que lo transformes hasta reconocer un tipo conocido, incluso si hay que probar varios caminos. Ejemplo

mínimo: $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x-8}}{\sqrt[3]{x}-4}$, que se resuelve con $u = \sqrt[6]{x}$.

-  **Pista:** Ninguna plantilla G encaja al primer intento.
-  **Pista:** Aparecen exponentes generales (x^n), raíces de índices distintos, parte entera o combinaciones de funciones trigonométricas.
-  **Pista:** Hay que construir la función desde una figura: la posición límite de un punto o una razón de longitudes o áreas.

-  **Frontera:** Si una plantilla G encaja directamente, NO es este arquetipo → ve a esa plantilla (temas 1.3, 1.4 o 1.7).
-  **Frontera:** Si el límite tiene parámetros que ajustar, NO es este arquetipo → ve a «Hallar parámetros para que un límite exista y tenga un valor dado» (1-X1).

 **Conexión:** Las heurísticas llevan siempre a alguna plantilla conocida: 1.3, 1.4, 1.3-G6 o 1.7.

2 **ORGANIZA** · Datos Iniciales

Leer activamente y organizar la información · ¿Qué tengo y qué me piden?

Elemento del problema	Notación	Valor, expresión o condición
Límite	—	_____ ($x \rightarrow$ ____)
Forma al sustituir	—	_____
Heurísticas a probar	—	☐ Cambio de variable ☐ Patrón ☐ Reescribir con límites conocidos ☐ Acotar
¿Qué se pide?	☐ Valor del límite	
Representación <i>[Si aplica: gráfica, diagrama, tabla, esquema...]</i>		

☐ **Control:** ¿Probaste primero las plantillas G y confirmaste que ninguna encaja? ☐ Sí ☐ No

3 ACTIVA • Fórmulas o Conceptos Clave

Activar solo la teoría necesaria · ¿Qué herramientas necesito?

Concepto y fórmula	Aplicación aquí
Cambio de variable $u = g(x)$, con $u \rightarrow g(a)$ si g es continua en a	Convierte raíces o exponentes en polinomios.
Suma geométrica $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + \dots + x + 1)$	Factoriza potencias generales.
Límites conocidos $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$ y $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \cos u}{u^2} = \frac{1}{2}$	Piezas para reescribir.
Emparedado Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ y g y h tienden a L , entonces f tiende a L	Para parte entera y oscilaciones.

 **Conexión:** Fichas teóricas: Temas 1.3, 1.4 y 1.7.

4 RESUELVE • Resolución Paso a Paso

Seguir un camino válido para cualquier versión · ¿Qué hago y en qué orden?

A • EXPLORA

1. **Sustituye** e identifica la forma indeterminada.
2. **Prueba** casos particulares ($n=2$, $n=3$) o valores numéricos para intuir el resultado.

B • ELIGE UNA ESTRATEGIA

3. **Elige** una heurística: cambio de variable, patrón, reescritura o acotación.

 **Clave:** El objetivo de toda heurística es **transformar el problema en uno que ya sabes resolver**.

4. **Aplica** la heurística y resuelve con la plantilla conocida.

 **Cuidado:** Al cambiar de variable, cambia también hacia dónde tiende la nueva variable.

C • VERIFICA

5. **Compara** con la estimación numérica de la fase A.

☐ **Control:** ¿Coinciden? Sí → listo. No → revisa la transformación o prueba otra heurística.

6. **Concluye** con el valor y la heurística usada.

5 COMPRUEBA • Verificación Final

Comprobar por caminos independientes · ¿Tiene sentido lo que obtuve?

☐	¿Hiciste una estimación numérica antes de resolver?
☐	¿Cambiaste bien el límite de la nueva variable?
☐	¿La transformación es algebraicamente correcta?
☐	¿El resultado coincide con la estimación?
☐	¿Nombraste la heurística usada?

6

**RECUERDA · Tip Final del Profesor**

Fijar la clave del arquetipo · ¿Qué no debo olvidar?



En un desafío, **no hay receta**: explora, conjetura y transforma hasta que aparezca un tipo conocido.

7

**PRACTICA · Práctica Aplicada – 5 versiones**

Transferir el arquetipo a casos nuevos · ¿Puedo hacerlo solo en otro caso?

Versión 1 <i>Patrón</i>	Calcula $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$ para n entero positivo.
Versión 2 <i>Cambio de variable</i>	Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$ (usa $u = \sqrt[3]{1+x}$).
Versión 3 <i>Configuración geométrica</i>	El punto $P = (t, 2t^2)$ se mueve sobre la parábola $y = 2x^2$ hacia el origen O . La mediatriz del segmento OP corta al eje y en Q . ¿A qué punto tiende Q cuando $t \rightarrow 0$?
Versión 4 <i>Trigonometría combinada</i>	Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$.
Versión 5 ★ <i>Más exigente</i>	Calcula $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$ (usa $u = \sqrt[6]{x}$).

CLAVE DE RESPUESTAS

1. n : tras la suma geométrica quedan n términos, y cada uno vale 1 en $x=1$.

2. $\frac{1}{3}$: con $x = u^3 - 1$ y $u \rightarrow 1$, $\frac{u-1}{u^3-1} = \frac{1}{u^2+u+1} \rightarrow \frac{1}{3}$.

3. El punto medio de OP es $\left(\frac{t}{2}, t^2\right)$ y la pendiente de la mediatriz es $-\frac{1}{2t}$, luego $Q = \left(0, t^2 + \frac{1}{4}\right)$ y $Q \rightarrow \left(0, \frac{1}{4}\right)$.

4. $\frac{1}{2}$, porque $\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos x}$.

5. $\frac{2}{3}$: con $u = \sqrt[6]{x}$, $\frac{u^2-1}{u^3-1} = \frac{u+1}{u^2+u+1} \rightarrow \frac{2}{3}$.