

PLANTILLA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Demostrar o refutar una afirmación general sobre límites o continuidad

CÓDIGO MAT-CAL 1-T3	NIVEL ■ T · Teórico	TIEMPO ESTIMADO 15–20 min por versión	VERSIÓN v1.0 · 09/2026
DISCIPLINA · ASIGNATURA Matemáticas · Cálculo Diferencial · Módulo 1		TEMA DEL ÍNDICE MAESTRO Límites y continuidad (arquetipo del módulo)	
QUÉ EVALÚA ESTE ARQUETIPO Que el estudiante decida si una afirmación general (sin una función concreta) es verdadera, y la demuestre con la definición o con teoremas ya probados, o la refute con un contraejemplo.			

 Pista
  Frontera
  Cuidado
  Clave
 ☐ Control
  Conexión

1 RECONOCE · Identificación del Problema

Reconocer el arquetipo antes de calcular · ¿Qué tipo de problema es este?

Este tipo de problema suele aparecer cuando el enunciado habla de funciones **cualesquiera** —«si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe y..., entonces...», «¿es cierto que...?», verdadero o falso— y no da ninguna fórmula. Aquí se espera que decidas si la afirmación es verdadera; si lo es, que la demuestres con la definición ε - δ o con teoremas ya probados; si no, que la refutes con un contraejemplo sencillo. Ejemplo mínimo: «si f y g son continuas en a , entonces $f+g$ es continua en a ».

 **Pista:** El enunciado habla de f y g **generales**, sin fórmula: «si..., entonces...», «demuestra que», «¿verdadero o falso?».

 **Pista:** Se trata de una propiedad: unicidad del límite, leyes de los límites, conservación del signo, continuidad de $|f|$ o de $f+g$, una caracterización.

 **Frontera:** Si hay una función **concreta** y se pide demostrar su límite, NO es este arquetipo → ve a «Demostrar un límite con la definición formal (ε - δ , ε - N o M - δ)» (1.5-T1).

 **Frontera:** Si se pide demostrar que el límite de una función concreta **no existe**, NO es este arquetipo → ve a «Demostrar que un límite no existe» (1-T1).

 **Frontera:** Si se pregunta si se cumplen las hipótesis del TVI o qué garantiza en una situación dada, NO es este arquetipo → ve a «Justificar si se cumplen las hipótesis del Teorema del Valor Intermedio» (1-T2).

 **Conexión:** Usa la definición ε - δ (1.5-T1), las leyes de los límites (tema 1.3) y la definición de continuidad (tema 1.8).

2 ORGANIZA · Datos Iniciales

Leer activamente y organizar la información · ¿Qué tengo y qué me piden?

Elemento del problema	Notación	Valor, expresión o condición
Hipótesis	—	_____
Tesis	—	_____
Decisión	—	☐ Verdadera → demostrar ☐ Falsa → contraejemplo
Herramienta	—	☐ Definición ε - δ ☐ Leyes o teoremas ☐ Desigualdad triangular
¿Qué se pide?	☐ Demostración ☐ Contraejemplo ☐ Verdadero o falso, justificado	

Representación

[Si aplica: gráfica, diagrama,
tabla, esquema...]

- ☐ **Control:** ¿Probaste la afirmación con dos o tres funciones sencillas (una constante, x , $\frac{|x|}{x}$, $\frac{1}{x}$) antes de decidir?
- ☐ Sí ☐ No

3 **ACTIVA** · Fórmulas o Conceptos Clave

Activar solo la teoría necesaria · ¿Qué herramientas necesito?

Concepto y fórmula	Aplicación aquí
Definición ε-δ $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) - L < \varepsilon$	Base de las demostraciones.
Desigualdad triangular $ u + v \leq u + v $ y $ u - v \leq u - v $	Separa errores y compara valores absolutos.
Recurso $\varepsilon/2$ Si $ f(x) - L < \frac{\varepsilon}{2}$ y $ g(x) - M < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces $ f(x) + g(x) - (L + M) < \varepsilon$	Combina dos límites.
Contraejemplos útiles $\frac{ x }{x}$ (salto); $\frac{1}{x}$ (no acotada); $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (oscila); 1 en racionales y 0 en irracionales	Refutan afirmaciones falsas.

 **Conexión:** Ficha teórica: temas 1.3, 1.5 y 1.8.

4 **RESUELVE** · Resolución Paso a Paso

Seguir un camino válido para cualquier versión · ¿Qué hago y en qué orden?

A · ANÁLISIS (BORRADOR)

1. **Escribe** la hipótesis y la tesis, y prueba la afirmación con funciones sencillas.
2. **Decide** si es verdadera o falsa.

 **Cuidado:** Un ejemplo que cumple la afirmación **no** la demuestra; en cambio, un solo contraejemplo basta para refutarla.

B · CONSTRUCCIÓN DE LA PRUEBA

3. **Si es verdadera**, demuéstrela con la definición o con teoremas ya probados; **si es falsa**, construye el contraejemplo y comprueba que cumple la hipótesis y no la tesis.

 **Clave:** Una afirmación general se **demuestra** para todas las funciones que cumplen la hipótesis, o se **refuta** con **un** caso concreto: primero decide cuál de los dos caminos tomar.

C · REVISIÓN

4. **Revisa** que usaste todas las hipótesis (o que el contraejemplo las cumple todas).

☐ **Control:** ¿Cada paso está justificado por una definición, un teorema o una desigualdad?

5. **Concluye:** «la afirmación es verdadera (falsa) porque...».

5 **COMPRUEBA** · Verificación Final

Comprobar por caminos independientes · ¿Tiene sentido lo que obtuve?

☐	¿Separaste hipótesis y tesis?
☐	¿Probaste casos sencillos antes de decidir?
☐	¿La demostración vale para todas las funciones de la hipótesis?
☐	¿El contraejemplo cumple la hipótesis y falla la tesis?
☐	¿Concluiste con una frase?

6 **RECUERDA** · Tip Final del Profesor

Fijar la clave del arquetipo · ¿Qué no debo olvidar?

 Ante una afirmación general: **prueba primero con ejemplos sencillos; si resiste, demuéstrala; si falla, un contraejemplo basta.**

7 **PRACTICA** · Práctica Aplicada – 5 versiones

Transferir el arquetipo a casos nuevos · ¿Puedo hacerlo solo en otro caso?

Versión 1 <i>Verdadero o falso</i>	¿Verdadero o falso? Si $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$ existe, entonces existen $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$.
Versión 2 <i>Unicidad</i>	Demuestra que si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$, entonces $L = M$.
Versión 3 <i>Valor absoluto</i>	Demuestra que si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L $. ¿Es cierto el recíproco?
Versión 4 <i>Conservación del signo</i>	Demuestra que si f es continua en a y $f(a) > 0$, entonces $f(x) > 0$ en algún intervalo abierto que contiene a a .
Versión 5 ★ <i>Más exigente</i>	Demuestra que si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ y $ g(x) \leq M$ cerca de a (con $M > 0$), entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$. Úsalo para calcular $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

CLAVE DE RESPUESTAS

- Falso: con $f(x) = \frac{|x|}{x}$ y $g(x) = -\frac{|x|}{x}$ en $a = 0$, $f + g = 0$ tiene límite, pero ni f ni g lo tienen.
- Si $L \neq M$, toma $\varepsilon = \frac{|L - M|}{2}$. Con el menor de los dos δ , para $0 < |x - a| < \delta$ se tiene $|L - M| \leq |L - f(x)| + |f(x) - M| < 2\varepsilon = |L - M|$: contradicción.
- $||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L| < \varepsilon$ con el mismo δ . El recíproco es falso en general (sí vale si $L = 0$): con $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $|f(x)| = 1 \rightarrow 1$, pero $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ no existe.
- Con $\varepsilon = \frac{f(a)}{2}$ existe $\delta > 0$ tal que, si $|x - a| < \delta$, entonces $f(x) > f(a) - \frac{f(a)}{2} = \frac{f(a)}{2} > 0$.
- $|f(x)g(x)| \leq M|f(x)| < \varepsilon$ si $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$. Con $f(x) = x$ y $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $|g(x)| \leq 1$: el límite es 0.